一路領先問題(Lead all the way)

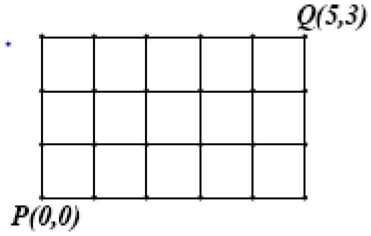
高一某班級有 40 位學生，其中甲、乙二位同學出馬競選班長，選舉採秘密投票方式，開票的結果，其唱票順序如下：甲甲乙甲乙、甲甲乙甲乙甲、‥‥ 。在宣佈開票完畢後，有一位同學說:「我注意到甲的得票數在開票過程中總是領先乙，這似乎很特別。」老師回答說：「一點也不特別，開票最後的結果是 28 比 12，甲獲勝，既然是甲贏，當然有可能他的票數一路領先」。這樣的問題我們稱為 ”一路領先問題”。

在知道了何謂一路領先問題之後， 接下來我們就要開始著手解決這個問題，考慮以下較簡單的情形，這也是屬於”一路領先”這一類型的問題:

假設有五個女生，三個男生，欲逐一進入教室，在過程中，教室內女生人數恆大於或等於男生人數的方法數共有幾種 ?

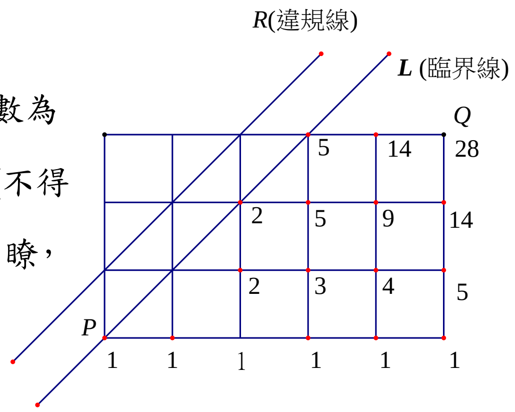
以下就來說明我們的作法:

考慮右方的棋盤式道路捷徑走法:



由起點 $P(0,0)$ 開始，每往右一步表示有一位女生進入教室, 每往上一步表示有一位男生進入教室,若能保持路徑中每一點的 x 坐標均大於或等於 y 坐標，則這樣的路徑就會滿足題意的一路領先狀態，即進入教室過程中，教室內女生人數恆大於或等於男生人數。

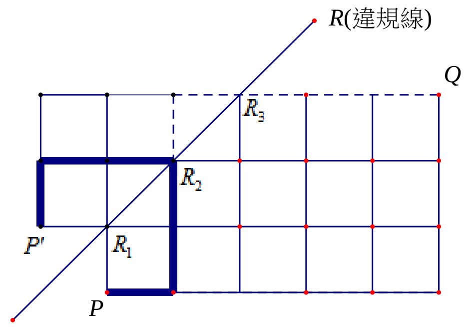
解法一：累加法



由點 P 出發至點 Q，逐一累計方法數，每一個點的方法數為其左點方法數加下點方法數，條件是不得逾越臨界線 L (不得接觸違規線 R)，累加後可得方法數為28，這種做法簡單明瞭，只要數據不大，都建議這樣作，

接下來將用較有規律的方法推廣至一般狀況

解法二：公式作法



(1) 考慮臨界線旁邊的違規線 R，以違規線為對稱軸，

將起點 P 對稱至點 P'，設違規線上有違規點 R_1 ,R_2 ,R_3

(2) 任一種違規的走法必經過至少一個違規點

令第一個經過的違規點是 R_k (其中 k =可能為 1,2,3)，

今將所有違規路徑以二階段考慮：

(甲階段)從起點 P 到第一個違規點 R_k

(乙階段)從第一個違規點 R_k 到終點 Q

(3) 所有違規的路徑都可以表示成 $P \to R_k \to Q$

(甲階段)由於對稱的關係，$P \to R_k$ 的方法數等於 $P' \to R_k$ 的方法數

(乙階段) $R_k \to Q$ 的方法數等於 $R_k \to Q$ 的方法數

故所有的違規路徑 $P \to R_k \to Q$ 均可對應至 $P' \to R_k \to Q$ 的路徑

(這樣的對應是一對一的對應)

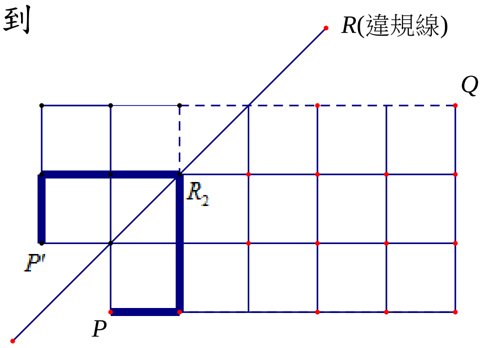
所以所有 $P \to R_k \to Q$ 違規路徑的方法數正好等於 $P' \to R_k \to Q$ 路徑的方法數

右下圖將其中一種違規走法的(甲階段)以粗線表示，將(乙階段)以虛線表示

(4)所有從起點 P 出發的違規走法都可逐一對應至從起點 P' 出發的走法

(5)因為 P' 與點 Q 在違規線的異側，故從起點 P' 出發走到

終點 Q 的所有走法都是違規走法



(6)由前述(4)與(5)的結論可知:

由起點P到終點Q的符合題意走法

=(由起點P到終點Q的所有走法)減去(由起點P到終點Q的違規走法)

=(由起點P到終點Q的所有走法)減去(由起點P'到終點Q的所有走法)

$= C_5^8 - C_6^8 = 28$

仿照以上論述我們可以將其推廣至一般情形:有n個女生,m個男生,逐一進入教室,在過程中,教室內女生人數恆大於或等於男生人數的方法數有$(C_n^{n+m} - C_{n+1}^{n+m})$種方法。

結論:

(一) 不記名投票,一路領先

(1) 女生n票,男生m票,$(n \ge m)$,女生票數恆 ≥ 男生票數,方法數為$(C_n^{n+m} - C_{n+1}^{n+m})$

(2) 女生n票,男生m票 $(n > m)$,女生票數恆 > 男生票數,請視為$(n-1 \ge m)$,

方法數為$(C_{n-1}^{n-1+m} - C_n^{n-1+m})$。

(二) 記名投票,一路領先

(1) 女生有n票,男生有m票$(n \ge m)$,女生的票數恆大於或等於男生的票數,

方法數為 $\left(C_n^{n+m} - C_{n+1}^{n+m}\right) \cdot n! \cdot m!$。

(2) 女生n票,男生m票,$(n \ge m)$,女生的票數恆大於男生的票數,

方法數為 $\left(C_{n-1}^{n-1+m} - C_n^{n-1+m}\right) \cdot n! \cdot m!$。

此外，值得一題的是，若 $m=n$ ，令 $C_n=C_n^{n+m}-C_{n+1}^{n+m}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\cdot n!}$ ，此數就是所謂的卡塔蘭數，這是一個常在組合數學各種計數問題中會使用到的數，卡塔蘭數前10項為數列:1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 組合數學中有非常多的組合結構可以用卡塔蘭數來計數。以下的例子其方法數都是卡塔蘭數 C_n， 提供大家參考：

- C_n 表示長度 $2n$ 的 dyck word 的個數。Dyck word 是一個有 n 個 X 和 n 個 Y 組成的字串，且所有的前綴字串皆滿足 X 的個數大於或等於 Y 的個數。

  以下為長度為 6 的 dyck words :

  XXXYYY　XYXXYY　XYXYXY　XXYYXY　XXYXYY

- 將上例的 X 換成左括號，Y 換成右括號，C_n 表示所有包含 n 組括號的合法運算式的個數。

  例如: 當 $n=3$ 時，結果如下所示:

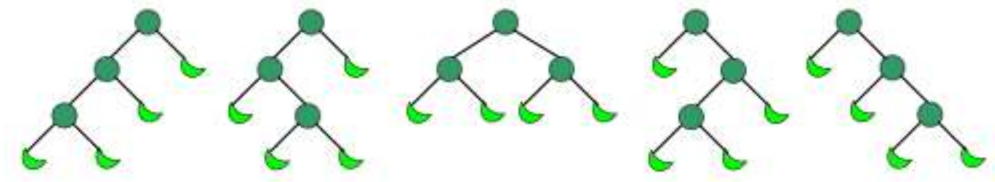
  ((()))　()(())　()()()　(())()　(()())

- 將 1 到 $2n$ 等 $2n$ 個自然數排成 $2\times n$ 階的矩陣，並且要求每一行數字由上到下嚴格遞增，每一列數字由左到右嚴格遞增

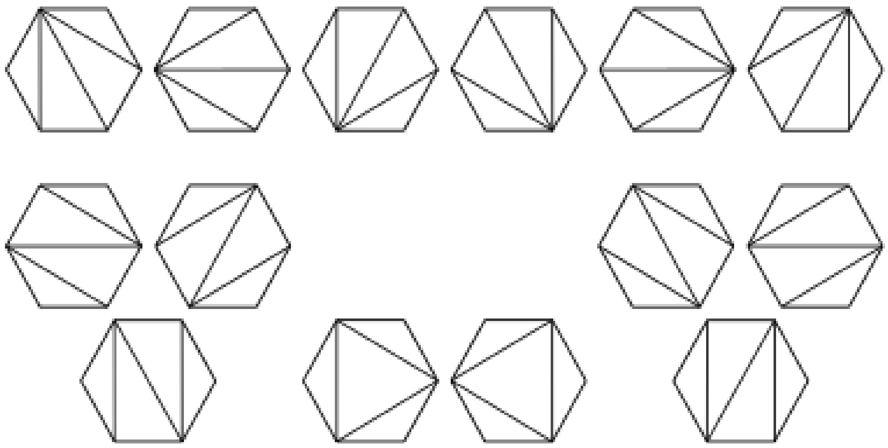
- 嚴格遞增的 $(n-1)$ 項的正整數數列 $a_1,a_2,\cdots a_{n-1}$ ，且每一個 $i=1,2,\cdots,n-1$ 都滿足 $1\le a_i\le 2i$

- C_n 表示有 $2n+1$ 個節點組成不同構滿二元樹（full binary tree）的方案數。

下圖中為 n=3 的情形，圓形表示內部節點，月牙形表示外部節點。



- C_n 表示通過連結頂點而將$(n+2)$邊的凸多邊形分成若干個不重疊三角形的方法個數。 下圖為 $n=4$ 的情況：



漢克爾矩陣:

無論 n 值為多少，$n\times n$ 階的漢克爾矩陣$\left[A_{i,j}\right]$行列式值為 1。（ 其中 $A_{i,j}=C_{i+j-2}$ ）

例如，$n=4$ 時，我們有

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 14\\ 2 & 5 & 14 & 42\\ 5 & 14 & 42 & 132\end{bmatrix}=1$$

更進一步，無論 n 值為多少，如果 $n\times n$ 階的漢克爾矩陣$\left[A_{i,j}\right]$矩陣被定義

為 $A_{i,j}=C_{i+j-1}$，其行列式值仍然為 1。

例如，$n=4$ 時，我們有

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 5 & 14\\ 2 & 5 & 14 & 42\\ 5 & 14 & 42 & 132\\ 14 & 42 & 132 & 429\end{bmatrix}=1$$

同時，這兩種情形合在一起唯一定義了卡塔蘭數。

例題:

1. 西班牙和葡萄牙兩隊比踢足球，西班牙隊以1：0領先，到球賽結束時比數是6：3 由西班牙隊獲勝，且比賽過程中西班牙沒被葡萄牙超過及平手，請問過程有幾種得分的方法？

解法:

首先西班牙隊以1：0領先，所以在後續比賽過程中，只要西班牙隊的得分 n 始終大於或等於葡萄牙隊的得分 m ，就可以保持比賽過程中始終領先的態勢，故利用結論(1)的公式，共有 $C_5^8-C_6^8$=28 可能得分的方法。

2. 在售票窗口前，有20位觀眾排隊等候開始售票，每張票價50元，每人限購一張。這 20 位觀眾中，有 12 位備有 50 元零錢，其餘 8 人只有百元鈔。現在售票員來了，她並沒有準備零錢。試求售完 20 張票而不會發生找不開錢的情形有幾種。【25194】

解法:

我們可把此問題視為將 12 張 50 元鈔票與 8 張 100 元鈔票依序排列，在此排列過程中，若50元鈔票數量始終大於或等於100元鈔票數量，那麼在整個售票過程中就不會發生找不開錢的情形。 所以利用結論(1)的公式，本題共有 $(C_{11}^{19}-C_{12}^{19})=25194$ 可能的售票方式。

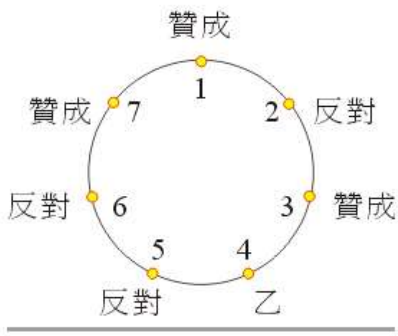
3. 在一個 2 列 5 行的方格內填入數字 1~10，填入數字的方式必須滿足相鄰兩格右邊的數字大於左邊的數字, 相鄰兩格上面的數字大於下面的數字,請問共有幾種填入數字的方式? 【42】

解法:

我們將數字 1~10 依從小到大的順序填入此 2 列 5 行的方格內，當我們填入某一數字時，只需考慮填入上面那一列或下面那一列，當選定列要填入此數字時，只能將此數字填入此列尚餘空格最左邊的空格中，否則便不能滿足題意要求，現在我們可以想像某人手中有 10 張卡片，其中有 5 張卡片上頭寫著 ”上”，另 5 張卡片上頭寫著 ”下” ，將此 10 張卡片任意在數字 1~10 前排成一列，排列過程中寫著下字的卡片張數必須恆大於或等於寫著上字的卡片張數，才是一種滿足題意的填空格方式，至此我們已將此問題轉換成一路領先的問題，所以答案為$(C_5^{10}-C_6^{10})=42$ 種填入數字的方式。

習題:

1. 甲與乙進行一場桌球單打比賽,先得 11 分者,則算贏得勝利,若最後甲以 11:5 贏得勝利，則比賽過程中甲一直保持領先的比分序列共有幾種? 【2548】
2. 某次選舉採不記名投票，若甲得 8 票，乙得 7 票，開票過程中甲得票數恆大於等於乙得票數，則所有可能的開票結果有幾種？ 【1430】
3. 甲乙兩人競選班代共獲 13 張票，若開票時甲一直保持領先，而最後以 3 票獲勝，則開票的情形有幾種? 【297】
4. 甲主持一個小組會議，小組組員的位置如下圖所示，除了乙這位組員之外，其他人對此議案的態度甲都已事先知道，甲深知乙的個性，如果甲問每一個人的意見時.，贊成人數領先的話，則當問到乙的意見時，乙必定投贊成票，現在甲希望能得到他所有能得的贊成票，請問甲該從哪一位置問起，才會使得在叫到乙之前贊成票呈現領先的情勢。 【在 1、3、6 或 7 的位置】



5. 10 人委員會圍坐一圓桌，在表決某一提案時，得 7 票贊成票，3 票反對票，試求當主席問到每一人的意見時，贊成票數總是多於反對票數的機率。 【$\frac{2}{5}$】

參考資料：

1. 維基百科: 卡塔蘭數
2. 數學傳播第四卷第四期