國立新竹高中107學年度第二學期「竹籤算籌數學徵答」題目

高一組　第二次

1. 投稿期限：108年05月13日(一)上午8時整至108年05月31日(五)下午5整
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「交件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

第一題：

試利用任意 n 個($n\ge 2$)集合 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 滿足取捨原理：

$$n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}n(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}n(A_i\cap A_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}n(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)$$

，且滿足笛摩根定律：$(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)'=A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap\cdots\cap A_n'$，證明：

(1) 若 n 個人每個人帶一件禮物參加同樂會，所有的人帶的禮物都不同，今眾人交換禮物，則每個人均拿到別人禮物的方法數為 $n!(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!})$。(錯位排列問題)

(2) 設正整數 n 的標準分解式為 $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_k^{\alpha_k}$，其中 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 為不同的質數且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k$ 為正整數，則不大於 n 且與 n 互質的正整數的個數為 $n(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})(1-\frac{1}{P_3})\cdots(1-\frac{1}{P_k})$。(尤拉公式)

第二題：

給定一圓上n個點($n\ge 3$)，形成一圓內接n邊形，且此n邊形的任意三條對角線均不共點，

(1) 設 d_k 表示由圓內接k邊形增加為圓內接 $(k+1)$ 邊形時(其中任意三條對角線均不共點)，圓內接 $(k+1)$ 邊形的邊與對角線將圓的內部分割的區域數所增加的個數，證明：$d_k=\frac{1}{6}k(k^2-3k+8)$。

(2) 承(1)，證明：此圓內接n邊形的邊及對角線將圓的內部分割的區域數為 $1+C_2^n+C_4^n$。

(提示：$\sum_{k=1}^{n-1}k(k-1)(k-2)=\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$)