# 國立新竹高中 104 學年度第二學期「竹籤算籌數學有獎徵答」題目

## 高一組　第二次

1. 投稿期限：105 年 05 月 16 日(一)上午 7 時半至 105 年 06 月 03 日(五)下午 5 時
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「交件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

第一題：

(1) 試證明：對任意正整數 $n$, 平面上的 $n$ 個圓最多可將平面分割成 $n^2-n+2$ 個區域。

(2) 試證明：對任意正整數 $n$, 空間中的 $n$ 個球面最多可將空間分割成 $\dfrac{n^3-3n^2+8n}{3}$ 個區域。

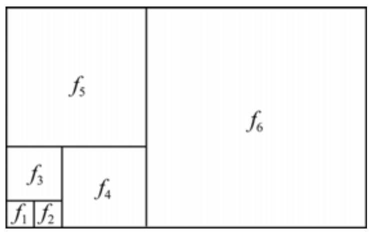
第二題：

(1) 試用文氏圖證明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) 試用數學歸納法證明取捨原理：$\forall n\geq 2$,

$$\begin{aligned}&n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=n(A_1)+n(A_2)+\cdots+n(A_n)\\&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-\cdots-n(A_{n-1}\cap A_n)\\&+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+n(A_1\cap A_2\cap A_4)+\cdots+n(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)\\&-\cdots\\&+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\end{aligned}$$

第三題：




(1) 如右圖，$f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6$ 分別表示所在正方形的邊長，這些正方形的擺置依循往右，向上的規律。已知 $f_1=1$，求 $f_{11}$ 與 $f_{12}$（即求第 11 個與第 12 個正方形的邊長）。

(2) 已知費氏數列 $<f_n>$ 的遞迴式為 $\begin{cases}f_1=1,\ f_2=1\\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ \forall n\in N\end{cases}$，

試證其一般項為 $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$。

(3) 使用 1, 2 兩個數字寫成的八位正整數中，沒有兩個 1 相鄰的數共有多少個？
(提示：可利用費氏數列求解)