國立新竹高中104學年度第二學期「竹籤算籌數學有獎徵答」題目

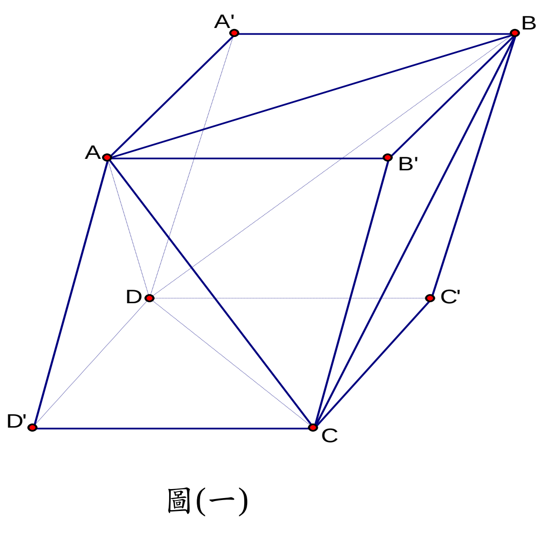
高二組　第一次

1. 投稿期限：105年03月28日(一)上午7時半至105年04月15日(五)下午5時
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「交件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

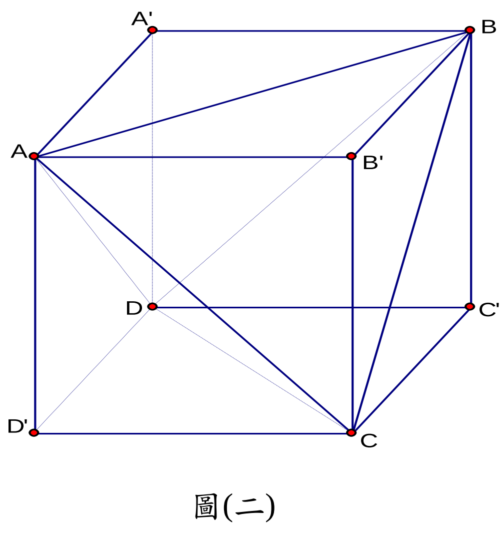
第一題：

對於四面體與平行六面體除了體積外，看似無關，事實上有許多相輔相成之處。以下我們將建構四面體外接平行六面體的圖形來探討四面體的一些性質。

說明：當一四面體的六條棱均為一平行六面體各側面的對角線時，如此的四面體與平行六面體是一一對應的，此時此平行六面體稱為四面體的外接平行六面體。如圖(一)及圖(二)平行六面體 $AA'BB'-D'DC'C$ 為四面體 $A-BCD$ 的外接平行六面體。顯而易見的，正四面體外接平行六面體為正方體，如(圖二)。



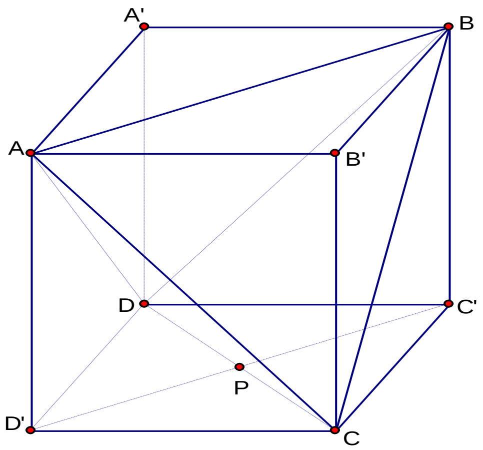
圖(一)



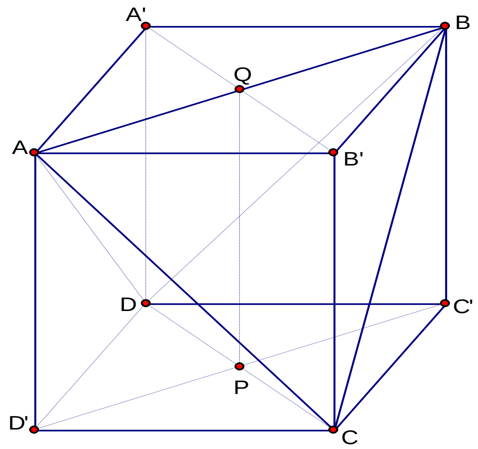
圖(二)

我們看看以下曾經做過的問題：

正四面體 $A\text{-}BCD$ 中，已知邊長為 a，① 求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角 θ。　② 求 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離。



圖(三)



圖(四)

說明：① 由圖(三)可知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 夾角 θ 等於 $\overrightarrow{CD}$ 與 $\overrightarrow{D'C'}$ 夾角，即 $\angle C'PD=90^0$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$。

② 同理由圖(四)可知 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 距離即為 $\overline{AB}$ 中點 Q 與 $\overline{CD}$ 中點 P 的距離 $=\overline{PQ}=$ 正立方體邊長 $=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$。

由上述兩題可將正四面體中複雜的空間概念問題轉換為正立方體中簡單的幾何問題，此即為本例中所要呈現的重點。

仿照以上的方法，試證下列兩小題：

(1) 四面體 A-BCD 中，已知 $\overline{AB}=\overline{CD}=a$，$\overline{AD}=\overline{BC}=b$，$\overline{AC}=\overline{BD}=c$，

① 證明：$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離為 $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$。(3 分)

② 證明此四面體體積 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$。(3 分)

(提示：一四面體的外接平行六面體體積為此四面體體積的 3 倍。)

(2) 四面體 A-BCD 中，已知 $\overline{AB}=m$，$\overline{CD}=n$，$\overline{AD}=p$，$\overline{BC}=q$，$\overline{AC}=r$，$\overline{BD}=s$，

① 設 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角為 θ，證明：$|\cos\theta|=\dfrac{|p^2+q^2-r^2-s^2|}{2mn}$。(6 分)

② 令四面體體積為 V，證明：$\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的距離為 $\dfrac{12V}{\sqrt{(2mn+p^2+q^2-r^2-s^2)(2mn+r^2+s^2-p^2-q^2)}}$。

(6 分)

第二題：

(1) 空間中有相異四點 O，A，B，C，其中 A、B、C 不共線且 O 不在平面 ABC 上，而 P 為空間中一點。證明：A，B，C，P 四點共面$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OP}$ 可表示為 $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$，其中 α、β、$\gamma\in R$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=1$。(4 分)

(2) 已知一四面體 $O\text{-}ABC$ 中，$\triangle ABC$ 的重心 G，$\overline{OA}$ 的中點 M，$\overline{OG}$ 與平面 MBC 交於點 H。

① 求 $\overline{OH}:\overline{HG}$。(4 分)

② 若 $\overline{MH}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，求 $\overline{BD}:\overline{DC}$。(4 分)