

國立新竹高中 104 學年度第二學期「竹籤算籌數學有獎徵答」題目

高一組 第一次

1. 投稿期限：105 年 03 月 28 日(一)上午 7 時半至 105 年 04 月 15 日(五)下午 5 時
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「交件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午 7 時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

第一題：

- (1) 用 1 元、5 元、10 元組成 $10n$ 元，其中 n 為正整數，請證明組成之方法數為 $(n+1)^2$ 。
- (2) 用 1 元、5 元、10 元、50 元組成 1000 元，請問共有多少種組法？

第二題：

二次函數 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，其中 $a, b \in R$ ，若在 $0 \leq x \leq 1$ 時， $f(x)$ 之最小值為 m ，且 a, b 滿足 $a + 2b \leq 2$ ，則 m 之最大值為何？

第三題：

一數列 $\langle a_n \rangle$ ，滿足 $\begin{cases} 2a_1 = x \\ 2a_{n+1} = a_n^2 + 1 \end{cases}$ ，其中 x 為正數，

- (1) 若 $x \neq 2$ ，請證明 $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ 。
- (2) 若 $x < 2$ ，請證明 $a_n < 1$ 對所有 $n \geq 1$ 恆成立。
- (3) 設 ε 為正數，且 $1 - \frac{x}{2} > \varepsilon$ ，若 a_1, a_2, \dots, a_n 均小於 $1 - \varepsilon$ ，請證明關於個數 n 之不等式 $2 - x > n\varepsilon^2$ 恆成立。