

國立新竹高中 104 學年度第一學期「竹籤算籌數學有獎徵答」題目

高一組 第一次

1. 投稿期限：104 年 10 月 26 日(一)上午 7 時半至 104 年 11 月 13 日(五)下午 5 時
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「交件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午 7 時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

第一題：

已知實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=0$ ， $abc>0$ ，

$$\text{且 } x = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}, \quad y = a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

則 $x^{2015} + 104xy + y^3$ 之值為何？

第二題：

$$\text{三正數 } x, y, z \text{ 滿足不等式組：} \begin{cases} \frac{11}{6}z < x + y < 2z \\ \frac{3}{2}x < y + z < \frac{5}{3}x \\ \frac{5}{2}y < x + z < \frac{11}{4}y \end{cases}, \text{ 則 } x, y, z \text{ 的大小關係為何？}$$

第三題：

設 a, b, c, d 為相異的實數，且 $a+b+c+d=3$ ， $a^2+b^2+c^2+d^2=45$ ，

$$\text{若 } f(x) = \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}a^3 + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}b^3 + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}c^3 + \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}d^3,$$

(1) 化簡 $f(x)$ 。

(2) 求 $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ 之值。

(3) 求 $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$ 之值。