

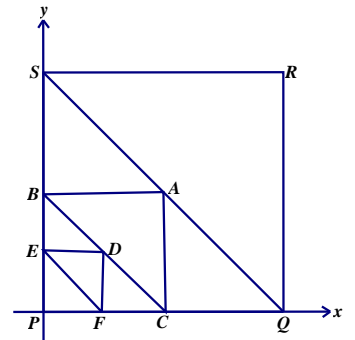
國立新竹高中 104 學年度第一學期「竹籤算籌數學有獎徵答」題目

高二組 第一次

1. 投稿期限：104 年 10 月 26 日(一)上午 7 時半至 104 年 11 月 13 日(五)下午 5 時
2. 解答請寫在答案稿紙上，需標明「題號」且詳列過程(不限定數學工具或方法，無過程者不予評閱)，並務必註明「文件時間」、「班級」、「座號」、「姓名」。
3. 答案稿紙可至教務處或數學科辦公室索取，一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
4. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午 7 時半繳交。
5. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
6. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

第一題：

如右圖，在座標平面上， $PQRS$ 為正方形，且四頂點座標為 $P(0,0), Q(1,0), R(1,1), S(0,1)$ 。



- (1) 若 $\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，且點 A 在 \overline{SQ} 上、點 B 在 \overline{PS} 上、點 C 在 \overline{PQ} 上，求點 A 的座標，並請證明滿足要求的 $\triangle ABC$ 有無窮多個。(5 分)
- (2) 給定一個如(1)所述的 $\triangle ABC$ ，並設 $B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ 。若 $\triangle DEF$ 為等腰直角三角形，且點 D 在 \overline{BC} 上、點 E 在 \overline{PB} 上、點 F 在 \overline{PC} 上，求點 D 的座標，並請證明滿足要求的 $\triangle DEF$ 有無窮多個。(5 分)

第二題：

- (1) 請分別求出方程式 $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ 的三個根及方程式 $3x - 4x^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的三個根，答案請用三角函數值來表示。(3 分)
- (2) 求多項式 $f_5(x)$ 及 $g_5(x)$ ，使得對任意的有向角 θ ，下式恆成立：
$$\cos 5\theta = f_5(\cos \theta), \sin 5\theta = g_5(\sin \theta)。$$
(3 分)
- (3) 已知有多項式 $f_{2015}(x)$ 及 $g_{2015}(x)$ ，使得對任意的有向角 θ ，下式恆成立：
$$\cos 2015\theta = f_{2015}(\cos \theta), \sin 2015\theta = g_{2015}(\sin \theta)。$$
求 $f_{2015}(104) - g_{2015}(-104)$ 之值。(4 分)

第三題：

設 R, r 分別為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑及內切圓半徑，而 $a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB}$ 。

(1) 試證： $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ ，並問等號何時成立？(3分)

(2) 試證： $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，並問等號何時成立？(3分)

(3) 承(1)、(2)，試證： $R \geq \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \geq \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \geq 2r$ ，並問諸等號何時成立？(4分)