國立新竹高中 104 學年度第 1 學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高 二 組　第 1 次　　　　　班級：17　座號：1　姓名：王竑安

交件時間：~~104~~ 年 ~~11~~ 月 ~~13~~ 日 ~~下~~ 午 ~~2~~ 時 ~~0~~ 分（簽證教師：傅志仁）

第 3 題：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　第 5 頁，共 8 頁

$\boxed{\text{一階推論就提}}$

2.5

(1) 由算幾不等式

$$a=\frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2}\geq\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}\ -①$$

$$b=\frac{(a+b-c)+(-a+b+c)}{2}\geq\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)}\ -②$$

$$c=\frac{(a-b+c)+(-a+b+c)}{2}\geq\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)}\ -③$$

$$①\times②\times③\Rightarrow abc\geq\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}$$

$\because$ $a,b,c$ 為 $\triangle ABC$ 的邊長，而兩邊和必大於第三邊

$\therefore$ $a+b-c>0,\ b+c-a>0,\ c+a-b>0$

$\therefore$ $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

等號成立 $\Leftrightarrow a+b-c=a-b+c=c+a-b$

$\Leftrightarrow a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 為正三角形時　Q.E.D. □

3

(2) $\because$ $A,B,C$ 為三角形的內角

$\therefore$ $0<A,B,C<\pi$

$$\Rightarrow 0<\frac{A+B}{2}<\pi,\ -\frac{\pi}{2}<\frac{A-B}{2}<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A+B}{2}>0,\ 0<\cos\frac{A-B}{2}\leq 1$$

$$\therefore \sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leq 2\sin\frac{A+B}{2}\ -(1)$$

（由和差化積）

等號成立 $\Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2}=1\Leftrightarrow\frac{A-B}{2}=0^\circ\Leftrightarrow A=B$

設另一角度 $D=\frac{A+B+C}{3}=60^\circ$

同理可得 $\sin C+\sin D\leq 2\sin\frac{C+D}{2}$，等號成立於 $C=D=60^\circ\ -(2)$

$(1)+(2)\Rightarrow \sin A+\sin B+\sin C+\sin D\leq 2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{C+D}{2}\right)\leq 2\cdot 2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C+\sin D\leq 4\sin\frac{A+B+C+D}{4}$（等號成立於 $A=B=C=D=60^\circ$ 時）

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C\leq 4\sin\frac{A+B+C+\frac{A+B+C}{3}}{4}-\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

國立新竹高中104學年度第1學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高二組　第1次　　　班級：17　座號：1　姓名：王立安

交件時間：~~104年11月13日下午2時0分~~（簽證教師：陳志仁）

第3題：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　第6頁，共8頁

$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C \le 3\sin\frac{A+B+C}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$（等號成立於 $A=B=C=60^\circ$，即 $\triangle ABC$ 為正三角形時）

Q.E.D.

4

(3)

由(2)知

$\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$，等號成立於 $A=B=C$ 時

$\Leftrightarrow 2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C \le 3\sqrt{3}R$，$R$ 為 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑

(正弦定理)

$\Leftrightarrow a+b+c \le 3\sqrt{3}R$

$\Leftrightarrow R \ge \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}$，等號成立於 $a=b=c$ 時 —〈1〉

而由算幾不等式：

$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$，等號成立於 $a=b=c$ 時

$\therefore R \ge \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{abc}\right) = \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}}$，等號成立於 $a=b=c$ 時 —〈2〉

由〈2〉可知

$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \ge \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}}$，等號成立於 $a=b=c$ 時

$\Leftrightarrow \frac{a+bc}{3\sqrt[3]{abc}} \ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}} = \left(\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^{\frac{1}{2}} \ge \sqrt{1} = 1$

$\Leftrightarrow (abc)^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \ge 1$

$\Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}(a+b+c)^{\frac{1}{2}} \ge 1$

$\Leftrightarrow (abc)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \ge (abc)^{\frac{1}{2}}(a+b+c)^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}} \ge \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$，等號成立時 $a=b=c$ 時 —〈3〉

國立新竹高中104學年度第1學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高二組 第1次 班級：17 座號：1 姓名：王立安

交件時間：~~104~~年~~11~~月~~13~~日~~下~~午~~2~~時~~0~~分（簽證教師：傅吉仁）

第3題： 第7頁，共8頁

再來欲證明 $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \geq 2r$ -(*)

$\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} \geq 2r$

$\Leftrightarrow \frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$

故只要證明 $\frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$ 即可

$\because \triangle ABC$面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}ab\left(\frac{c}{2R}\right)$ (由正弦定理知)

$= \frac{abc}{4R}$

又 $\triangle ABC$面積 $= \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ ，$r$為$\triangle ABC$的內切圓半徑

$\therefore \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} r$

$\Leftrightarrow \frac{abc}{a+b+c} = 2Rr$

$\therefore \frac{abc}{a+b+c} \geq 4r^2$

$\Leftrightarrow 2Rr \geq 4r^2$

$\Leftrightarrow R \geq 2r$

故欲證(*)，只需證明 $R \geq 2r$ 即可

$\because \triangle ABC$面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s = \frac{a+b+c}{2}$ (海龍公式)

$\therefore \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$\frac{a+b+c}{2} r = sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

國立新竹高中104學年度第1學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高二組 第1次 班級：17 座號：1 姓名：王立安

交件時間：~~104~~年~~11~~月~~13~~日~~下~~午~~2~~時~~0~~分（簽證教師：傅志仁）

第3題： 第8頁，共8頁

$\therefore R \geq 2r$

$\Leftrightarrow \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \geq 2\dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

$\Leftrightarrow abcs \geq 8\left(\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right)^2 = 8s(s-a)(s-b)(s-c)$ （$\because s, s-a, s-b, s-c$ 皆 $>0$）

$\Leftrightarrow abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c) = 8\cdot\dfrac{b+c-a}{2}\cdot\dfrac{a+c-b}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}$

$\Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

而由(1)之證明已知成立，且等號成立於 $a=b=c$ 時

$\Leftrightarrow R \geq 2r$，等號成立於 $a=b=c$ 時

$\Leftrightarrow R \geq 2r$，等號成立於 $a=b=c$ 時 —〈4〉

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}} \geq 2r$，等號成立於 $a=b=c$ 時

故由〈1〉、〈2〉、〈3〉、〈4〉知

$R \geq \dfrac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \geq \dfrac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{\dfrac{abc}{a+b+c}} \geq 2r$，諸等號成於 $a=b=c$ 時，即 $\triangle ABC$ 為正三角形時

Q.E.D □

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。