

高二組 第二次 班級：17 座號：1 姓名：王立安

交件時間：104 年 12 月 23 日 上午 8 時 0 分 (簽證教師：張世揚)

第二題：∵ a, b, sinθ, cosθ ∈ ℝ 第 1 頁，共 5 頁

+4

(1) 由柯西不等式知
 $(a^2 + b^2)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \geq (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$, 等號成立時 a = b = sinθ = cosθ
 $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq (a\sin\theta + b\cos\theta)^2$, 等號成立時 a = b = sinθ = cosθ
 (∵ a² + b² ≥ 0)
 $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a\sin\theta + b\cos\theta|$, 等號成立時 a = b = sinθ = cosθ
 Q.E.D. □

+1

(2) 當θ為銳角時, sinθ, cosθ ≥ 0
 $\Rightarrow \sqrt{\sin\theta}, \sqrt{\sin^3\theta}, \sqrt{\cos\theta}, \sqrt{\cos^3\theta} \in \mathbb{R}$
 由柯西不等式知
 $\left[\left(\sqrt{\frac{8}{\sin\theta}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{27}{\cos\theta}} \right)^2 \right] \left[\left(\sqrt{\frac{\sin^3\theta}{8}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\cos^3\theta}{27}} \right)^2 \right] \geq (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2$
 欲找最小值, 需等號成立 $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{8}{\sin\theta}} : \sqrt{\frac{27}{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\sin^3\theta}{8}} : \sqrt{\frac{\cos^3\theta}{27}}$ → 非定值?
 $\Leftrightarrow \frac{27\sin^3\theta}{8\cos\theta} = \frac{8\cos^3\theta}{27\sin\theta}$
 (等號兩側同乘 $\frac{27\sin\cos\theta}{8}$)
 $\Leftrightarrow \frac{27}{8}\sin^3\theta = \cos^3\theta$ (∵ θ為銳角 ∴ sinθ, sin³θ ≥ 0, 即 $\sqrt{\sin^6\theta} = \sin^3\theta$)
 $\Leftrightarrow \tan^3\theta = \frac{8}{27}$
 $\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{2}{3}$
 $\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ (∵ θ為銳角)
 ∴ 此日時 $\left(\sqrt{\frac{8}{\sin\theta}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{27}{\cos\theta}} \right)^2 = \frac{8}{\sin\theta} + \frac{27}{\cos\theta} = 4\sqrt{13} + 9\sqrt{13} = 13\sqrt{13}$
 故所求為 $13\sqrt{13}$ ✖

1. 一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

高 二 組 第 二 次 班級：17 座號：1 姓名：王立安

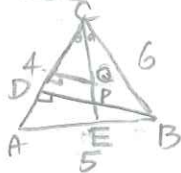
交件時間：104年12月23日上午8時0分 (簽證教師：洪世揚)

第 二 題：

第 2 頁，共 5 頁

(1)

依題意作 $\triangle ABC$



設 BD 為 AC 上的高，即 D 在 AC 上。

設 $AD = x$

$\therefore BD \perp AC$

$$\therefore 5^2 - x^2 = 6^2 - (4-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 25 - x^2 = 36 - 16 + 8x - x^2$$

$$\Leftrightarrow 5 = 8x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{8}, \text{ 即 } AD = \frac{5}{8} = \frac{5}{32}AC$$

另外，設 CE 為 $\angle C$ 的角平分線，交 AB 於 E 點

$$\therefore AE:EB = CA:CB = 4:6, \text{ 即 } AE = \frac{2}{5}AB$$

$$\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$$

$$= x\vec{AB} + \frac{32}{5}x\vec{AD}$$

$$= \frac{5}{2}x\vec{AE} + y\vec{AC}$$

$\therefore B, D, P$ 三點共線且 C, P, E 三點共線

$$\therefore \begin{cases} x + \frac{32}{5}y = 1 \\ \frac{5}{2}x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x = \frac{9}{25}, y = \frac{1}{10} *$$

1. 一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

高 二 組 第 二 次

班級： 17 座號： 1 姓名： 王立安

交件時間： 104 年 12 月 23 日 上午 8 時 0 分 (簽證教師： 廖世楷)

第 二 題：

第 3 頁，共 5 頁

(2) 設 FG 為 AC 的中垂線，交 AC 於 F ，交 CE 於 Q ，交 BC 於 G

$$\because FG \perp AC \text{ 且 } BD \perp AC$$

$$\therefore FG \parallel BD$$

$$\therefore CF:FB=CQ:QP=CG:GB=2:4-\frac{3}{8}-2=16:11$$

$$\therefore CQ:QP=16:11$$

$$\therefore \vec{AQ} = \frac{11}{27}\vec{AC} + \frac{16}{27}\vec{AP}$$

$$= \frac{11}{27}\vec{AC} + \frac{16}{27}\left(\frac{9}{25}\vec{AB} + \frac{1}{10}\vec{AC}\right)$$

$$= \frac{16}{75}\vec{AB} + \frac{7}{15}\vec{AC}$$

$$\text{設 } \vec{AP} = x\vec{AQ} + (1-x)\vec{AE} \quad (\because Q, P, E \text{ 點共線})$$

$$\therefore \frac{9}{25}\vec{AB} + \frac{1}{10}\vec{AC} = x\left(\frac{16}{75}\vec{AB} + \frac{7}{15}\vec{AC}\right) + \frac{2}{5}(1-x)\vec{AB}$$

$$\therefore \frac{9}{25}\vec{AB} + \frac{1}{10}\vec{AC} = \left(\frac{2}{5} - \frac{14}{75}x\right)\vec{AB} + \frac{7}{15}x\vec{AC}$$

$$\therefore x = \frac{3}{14}$$

$$\therefore QP:PE=11:3$$

$$\therefore CQ:QP:PE=16:11:3, \text{ 即 } QP = \frac{11}{30}CE$$

$$\therefore \Delta APQ \text{ 面積} = \frac{11}{30} \Delta ACE \text{ 面積} = \frac{11}{30} \times \frac{2}{5} \Delta ABC \text{ 面積}$$

$$\therefore \frac{\Delta APQ \text{ 面積}}{\Delta ABC \text{ 面積}} = \frac{11}{75} \quad *$$

1. 一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

高二組 第二次

班級：17 座號：1 姓名：王立安

交件時間：104年12月23日上午8時0分（簽證教師：王立安）

第三題：

第4頁，共5頁

第一個方法：

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle NQC$ 中

(1) $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{CN}$ (\because $ABCD$ 為平行四邊形, $BCNM$ 為正方形)

(2) $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle BCD = 360^\circ - \angle DCQ - \angle BCN - \angle BCD = \angle NCQ$
(平行四邊形同側內角互補)

(3) $\overline{CD} = \overline{QC}$ ($CDPQ$ 為正方形)

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle NQC$ (SAS)

$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{DC}$ 且 $\overline{DP} \parallel \overline{CQ}$

\therefore 將 $\triangle ACD$ 沿 \overline{CQ} 方向平移得 $\triangle A'QP$

$\therefore \angle PQC = 90^\circ = \angle A'QP + \angle A'QC = \angle ACD + \angle A'QC = \angle NQC + \angle A'QC = \angle A'QN$

$\therefore \overline{AC} \perp \overline{QN}$, 亦知 $\overline{AC} \perp \overline{QN}$ (\because 其皆為線性圖形) \times

第二個方法：

$\overline{AC} \cdot \overline{QN}$

$= (\overline{AD} + \overline{DC}) \cdot (\overline{QC} + \overline{CN})$

$= (\overline{BC} + \overline{DC}) \cdot (\overline{QC} + \overline{CN})$

$= \overline{BC} \cdot \overline{QC} + \overline{BC} \cdot \overline{CN} + \overline{DC} \cdot \overline{QC} + \overline{DC} \cdot \overline{CN}$

$= \overline{BC} \cdot \overline{QC} + \overline{DC} \cdot \overline{CN}$

$= \overline{CB} \cdot \overline{CQ} - \overline{CD} \cdot \overline{CN}$

$= |\overline{CB}| |\overline{CQ}| \cos \angle BCQ - |\overline{CD}| |\overline{CN}| \cos \angle DCN$

$\because |\overline{CB}| = |\overline{CN}|, |\overline{CQ}| = |\overline{CD}|$

$\angle BCQ = \angle BCD + \angle DCQ = \angle BCD + 90^\circ = \angle BCD + \angle BCN = \angle DCN$

$\therefore |\overline{CB}| |\overline{CQ}| \cos \angle BCQ - |\overline{CD}| |\overline{CN}| \cos \angle DCN$

$= 0$

$\therefore \overline{AC} \cdot \overline{QN} = 0 \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{QN} \Leftrightarrow \overline{AC} \perp \overline{QN}$ \times

1. 一張答案稿紙只能寫一個题目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

高 二 組 第 二 次

班級：17 座號：1 姓名：王立安

交件時間：104年12月23日 上午 8時0分 (簽證教師：王立安)

第 三 題：

第 5 頁，共 5 頁

第三個方法：

AB為x軸正向，作AE∥DP，AE為y軸正向

建立平面座標系，設 $A(0,0)$, $\vec{AD}=(x_1, y_1)$, $\vec{AB}=(x_2, 0)$

$\therefore B(x_2, 0)$, $C(x_1+x_2, y_1)$, $P(x_1, x_2+y_1)$, $Q=(x_1+x_2, x_2+y_1)$

$$(\because |\vec{AB}|=|\vec{BC}|=|\vec{DP}|)$$

$\therefore \vec{BC} \perp \vec{CN}$ 且 $\vec{BC}=(x_1, y_1)$ 且 AB為x軸正向，AE為y軸正向

可得 $\vec{CN}=(y_1, -x_1)$

即 $N(x_1+x_2+y_1, y_1-x_1)$

由上述討論知 \vec{AC} 方程式為 $y = \frac{y_1}{x_1+x_2}x$ ，斜率為 $\frac{y_1}{x_1+x_2}$

\vec{QN} 方程式為 $y = \frac{-(x_1+x_2)}{y_1}x + \frac{y_1^2+x_2y_1-x_1^2-x_2^2-2x_1x_2}{y_1}$ ，斜率為 $\frac{-(x_1+x_2)}{y_1}$

$$\text{而 } \frac{y_1}{x_1+x_2} \times \frac{-(x_1+x_2)}{y_1} = -1$$

$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{QN}$ 互相垂直，即 $\vec{AC} \perp \vec{QN}$ *

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。