國立新竹高中104學年度第一學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高二組　第二次　　班級：17　座號：10　姓名：林紘睿

交件時間：104年12月9日上午7時50分（簽證教師：李xx）

第一題：　(若 $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$)　　第1頁，共5頁

50

(1) 由柯西不等式得 $(a^2+b^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \geq (a\sin\theta+b\cos\theta)^2$ $\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\therefore a^2+b^2 \geq (a\sin\theta+b\cos\theta)^2$　$|a\sin\theta+b\cos\theta| \leq \sqrt{a^2+b^2}$

當 $\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\cos\theta}$ 時，即 $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ "=" 成立

(2) 由柯西不等式得 $\left[\left(\sqrt{\frac{8}{\sin\theta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{27}{\cos\theta}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{3\cos\theta}\right)^2\right] \geq (\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{27}\cdot\sqrt{3})^2=(4+9)^2=169$

且當 $\frac{\sqrt{\frac{8}{\sin\theta}}}{\sqrt{2\sin\theta}}=\frac{\sqrt{\frac{27}{\cos\theta}}}{\sqrt{3\cos\theta}}$ 時　即 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$ 時 "=" 成立　又 θ 為銳角

$\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{3\cos\theta}\right)^2>0$　故 $\frac{8}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta} \geq \frac{169}{\left(\sqrt{2\sin\theta}\right)^2+\left(\sqrt{3\cos\theta}\right)^2}=\frac{169}{2\sin\theta+3\cos\theta}$

又根據(1)之不等式可得 $|2\sin\theta+3\cos\theta| \leq \sqrt{2^2+3^2}$　$\because 2\sin\theta+3\cos\theta>0$

不等式可變為 $2\sin\theta+3\cos\theta \leq \sqrt{13}$　且當 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{3}{\cos\theta}$ 時 "=" 成立

$\frac{8}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta} \geq \frac{169}{2\sin\theta+3\cos\theta} \geq \frac{169}{\sqrt{13}}=13\sqrt{13}$　令 $\sin\theta=2k$, $\cos\theta=3k$

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 且 $\sin\theta\cos\theta>0$　$\therefore (2k)^2+(3k)^2=1$　$k^2=\frac{1}{13}$　$k=\frac{\sqrt{13}}{13}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{13}}{13}$　$\cos\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$　代入 $\frac{8}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta}$ 得 $\frac{8}{\frac{2\sqrt{13}}{13}}+\frac{27}{\frac{3\sqrt{13}}{13}}=13\sqrt{13}$

$\frac{8}{\sin\theta}+\frac{27}{\cos\theta}$ 的確可為 $13\sqrt{13}$，故得證其最小值為 $13\sqrt{13}$

(補過程) 若 $\sin\theta, \cos\theta<0$　考慮 $\sin\theta, \cos\theta=-\sin\theta, -\cos\theta$

由柯西不等式得 $(a^2+b^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \geq (a\sin\theta+b\cos\theta)^2=(a\sin\theta+b\cos\theta)^2$

$(a^2+b^2)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \geq (a\sin\theta+b\cos\theta)^2$　$a^2+b^2 \geq (a\sin\theta+b\cos\theta)^2$　$\sqrt{a^2+b^2} \geq |a\sin\theta+b\cos\theta|$

當 $\frac{a}{\sin\theta}=\frac{b}{\sin\theta}$　即 $\sin\theta=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\theta=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　"=" 成立

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

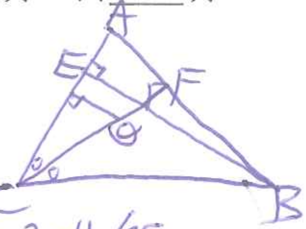
國立新竹高中 104 學年度第 一 學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高 二 組　第 二 次　　　班級：17　座號：10　姓名：林紘睿

交件時間：104年12月9日上午7時50分（簽證教師：　　）

+11

第 二 題：　　　　　　　　　　　　　　　第 2 頁，共　頁



(1) 令 $\overline{BP}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，$\overline{AE}=x$　$\overline{CE}=4-x$

$5^2-x^2=6^2-(4-x)^2$　$25-x^2=36-x^2+8x-16$　$x=\frac{5}{8}$

$\overline{AE}=\frac{5}{8}$　$\overline{CE}=\frac{27}{8}$　∵ A,E,C 共線 $\vec{AE}=\frac{|\vec{AE}|}{|\vec{AC}|}\vec{AC}=\frac{5}{32}\vec{AC}$

又 $\angle ECP=\angle PCB$　$\overline{EP}:\overline{PB}=\overline{EC}:\overline{CB}=\frac{27}{8}:6=9:16$　∵ E,P,B 共線

∴ $\vec{EP}=\frac{9}{25}\vec{EB}$　$\vec{AP}=\vec{AE}+\vec{EP}=\frac{5}{32}\vec{AC}+\frac{9}{25}\vec{EB}=\frac{5}{32}\vec{AC}+\frac{9}{25}(\vec{EC}+\vec{CB})$

$=\frac{9}{25}\cdot\frac{27}{32}\vec{AC}+\frac{9}{25}(\vec{AB}-\vec{AC})+\frac{5}{32}\vec{AC}=\frac{9}{25}\vec{AB}+\frac{5}{32}\cdot\frac{16}{25}\vec{AC}=\frac{9}{25}\vec{AB}+\frac{1}{10}\vec{AC}$

$(x,y)=(\frac{9}{25},\frac{1}{10})$

(2) 延長 $\overline{CQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F 則 $\angle ACF=\angle FCB$ 且 $\overline{AC}:\overline{CB}=2:3$

$\vec{CF}=\frac{3}{5}\vec{CA}+\frac{2}{5}\vec{CB}=\frac{2}{5}(\vec{AB}-\vec{AC})-\frac{3}{5}\vec{AC}=\frac{2}{5}\vec{AB}-\vec{AC}$　∵ C,Q,F 共線

∴ 可令 $\vec{CQ}=\frac{2k}{5}\vec{AB}-k\vec{AC}\ (k>0)$

∵ $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=|\vec{AB}||\vec{AC}|\cos A=4\cdot5\cdot\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{5}{2}$　且 $\vec{CQ}\cdot\vec{CA}=\frac{1}{2}|\vec{CA}|^2=8$

$(\frac{2k}{5}\vec{AB}-k\vec{AC})\cdot(-\vec{AC})=-\frac{2k}{5}\vec{AB}\cdot\vec{AC}+k|\vec{AC}|^2=-k+16k=8$　$k=\frac{8}{15}$

$\vec{CQ}=\frac{16}{75}\vec{AB}-\frac{8}{15}\vec{AC}$　$\vec{AQ}=\vec{AC}+\vec{CQ}=\frac{16}{75}\vec{AB}+\frac{7}{15}\vec{AC}$

$\vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}=\frac{11}{75}\vec{AB}-\frac{11}{30}\vec{AC}=\frac{11}{30}\vec{CF}$　$\overline{QP}=\frac{11}{30}\overline{CF}$

$\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ACF}}\times\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{11}{30}\times\frac{2}{5}=\frac{11}{75}$

A: (1) $(\frac{9}{25},\frac{1}{10})$ (2) $\frac{11}{75}$

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。

國立新竹高中104學年度第一學期「竹籤算籌數學有獎徵答」答案稿紙

高二組　第二次　　班級：17　座號：10　姓名：林紘睿

交件時間：104年12月9日上午7時50分（簽證教師：李俊中）

第三題：　　　　第3頁，共＿頁

將圖形座標化，令 $A(0,0)$ $B(m,0)$ $C(m+m',n)$ $D(m',n)$

$P(m',m+n)$ $Q(m+m',m+n)$ ∵CBMN為正方形

∴ $m_{\overline{BM}}=m_{\overline{CN}}$ 且 $m_{\overline{BM}}\times m_{\overline{BC}}=-1$ 又 $|\overline{BM}|=|\overline{CN}|=|\overline{BC}|$ 故 $M(m+n,-n)$

$N(m+m'+n,n-m')$ $\overrightarrow{AC}=(m+m',n)$ $\overrightarrow{QN}=(n,-m'-m)$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}=(m+m',n)\cdot(n,-m'-m)=(m+m')n-(m+m')n=0$

∵ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{QN}=0$ ∴ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{QN}$ 即 $\overleftrightarrow{AC}\perp\overleftrightarrow{QN}$

+8

1. 一張答案稿紙只能寫一個題目的解答，投稿不同題，請分別寫在不同的答案稿紙，否則不予評閱。
2. 同一題如不敷書寫，勿書寫於背面，請寫在不同的答案稿紙，並標明頁數與總頁數，按頁數排序後用訂書機裝訂於左上角。
3. 答案稿紙上須註明投稿時間，投稿前須請數學科任一位教師在投稿時間上簽證，否則視為隔日上午7時半繳交。
4. 每題可分次投稿，唯以最末次投稿時間為準；同一題若重複投稿，評閱與投稿時間均以最後投稿為準。
5. 稿件寫完請投入數學科辦公室的有獎徵答收稿信箱。